

LOGIC MỆNH ĐỀ

(Propositional Logic)

- Khái niệm mệnh đề
- Phép toán mệnh đề
- Dạng mệnh đề
- Các qui tắc suy diễn
- Các phương pháp chứng minh

KHÁI NIỆM MỆNH ĐỀ

- Mệnh đề là một phát biểu đúng hoặc sai
- Ví dụ:
 - Trái đất quay quanh mặt trời
 - $1+4 = 5$
 - 10 là số nguyên tố
- Các mệnh đề thường được ký hiệu bởi $P, Q, R, \dots, p, q, \dots$ và chân trị của mệnh đề ký hiệu 1 (đúng) 0 (sai)

PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Các phép toán mệnh đề còn gọi là **phép nối logic** (Logical connectives): $\neg$ (phủ định), $\wedge$ (hội), $\vee$ (tuyển), và $\rightarrow$ (kéo theo)

PHÉP PHỦ ĐỊNH

p	$\neg p$
0	1
1	0

p = "4 là số nguyên tố" thì $\neg p$ = "4 không là số nguyên tố" có chân trị là 1 (đúng)

PHÉP HỘI

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p = "12 là một số nguyên", q = "12 chia hết cho 5" thì
 $p \wedge q$ = "12 là một số nguyên chia hết cho 5", có **chân**
trị là 0 (sai)

PHÉP TUYỂN

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p = "12 là một số nguyên", q = "12 chia hết cho 5" thì
 $p \vee q$ = "12 là một số nguyên hoặc 12 chia hết cho 5",
có **chân trị là 1**

PHÉP KÉO THEO

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p = "12 là một số nguyên", q = "12 chia hết cho 5" thì $p \rightarrow q$ = "nếu 12 là một số nguyên thì chia hết cho 5", có **chân trị là 0**

LƯU Ý

- $p \vee q$ sai khi và chỉ khi p và q đều sai
- $p \wedge q$ đúng khi và chỉ khi p và q đều đúng
- $p \rightarrow q$ sai khi và chỉ khi p đúng q sai

DẠNG MỆNH ĐỀ

- Dạng mệnh đề (Propositional form-PF), $E(p, q, r, \dots)$, là một biểu thức logic chứa các hằng và các biến mệnh đề
- Nếu P, Q là hai dạng mệnh đề thì $\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \rightarrow Q$, cũng là các dạng mệnh đề
- Thứ tự ưu tiên: $(), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

DẠNG MỆNH ĐỀ

- Bảng chân trị của các dạng mệnh đề $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

DẠNG MỆNH ĐỀ

- Hai dạng mệnh đề P và Q được gọi là tương đương logic, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$ hoặc $P \equiv Q$, nếu chúng có cùng bảng chân trị
- Một dạng mệnh đề được gọi là **hằng đúng** nếu nó luôn có **chân trị bằng 1**
- Một dạng mệnh đề được gọi là **hằng sai** hay **mâu thuẫn** nếu nó **luôn có chân trị bằng 0**

DẠNG MỆNH ĐỀ

- Dạng mệnh đề Q được gọi là **hệ quả logic** của dạng mệnh đề P nếu **$P \rightarrow Q$ là một hằng đúng**, ký hiệu $P \Rightarrow Q$, khi đó cũng nói P có hệ quả logic là Q
- Hai dạng mệnh đề P và Q tương đương logic khi và chỉ khi Q là hệ quả logic của P và P là hệ quả logic của Q

DẠNG MỆNH ĐỀ

- Trong dạng mệnh đề P , nếu thay thế biểu thức con E bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được tương đương logic với P
- Giả sử $E(p, q, r, \dots)$ là một hằng đúng, nếu ta thay thế những nơi p xuất hiện trong E bởi một dạng mệnh đề tùy ý $F(p', q', r', \dots)$ thì dạng mệnh đề thu được vẫn là một hằng đúng

CÁC TƯƠNG ĐƯƠNG CƠ BẢN

- Luật phủ định của phủ định: $\neg \neg p \Leftrightarrow p$
- Luật lũy đẳng: $p \wedge p \Leftrightarrow p, p \vee p \Leftrightarrow p$
- Luật trung hòa: $p \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow p, p \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow p$
- Luật về phần tử bù: $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{0}, p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{1}$

CÁC TƯƠNG ĐƯƠNG CƠ BẢN

- Luật **thống trị**: $p \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}, p \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$
- Luật **hấp thụ**: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p, p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- Luật **giao hoán**: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

CÁC TƯƠNG ĐƯƠNG CƠ BẢN

- Luật **kết hợp**:
$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$
- Luật **phân bố**:
$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
- Luật **De Morgan**:
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

VÍ DỤ 1

Chứng minh rằng: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$

Ta có:

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r) \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee r \\ &\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee r) \\ &\Leftrightarrow q \rightarrow (\neg p \vee r) \\ &\Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r). \end{aligned}$$

VÍ DỤ 2

Chứng minh rằng: $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Ta có:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow r &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \\&\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r \\&\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \\&\Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r) \\&\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r).\end{aligned}$$

VÍ DỤ 3

Chứng minh rằng:

$[(r \rightarrow s) \wedge [(r \rightarrow s) \rightarrow (\neg t \vee u)]] \rightarrow (\neg t \vee u)$ là hằng đúng

Giải: thay thế $r \rightarrow s$ bởi p và $\neg t \vee u$ bởi q , thì bài toán tương đương với chứng minh mệnh đề $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ là hằng đúng

VÍ DỤ 3

Chứng minh: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ là hằng đúng

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q &\Leftrightarrow [p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q \\ &\Leftrightarrow [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \\ &\Leftrightarrow [\mathbf{0} \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow q \\ &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1} \end{aligned}$$

QUI TẮC SUY DIỄN (Inference Rules)

- Một **qui tắc suy diễn** là một hàm: $b = R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ **biến đổi** các dạng mệnh đề $a_1, a_2, \dots, a_n$ thành dạng mệnh đề b
- Các $a_1, a_2, \dots, a_n$ gọi là **giả thiết**, b gọi là **kết luận**

QUI TẮC SUY DIỄN

- Có thể biểu diễn một quy tắc suy luận như sau:

$$\frac{a_1, a_2, \dots, a_n \text{ (giả thiết - premises)}}{b \text{ (kết luận- conclusion)}} \quad \text{hoặc} \quad \frac{a_1, a_2, \dots, a_n}{\therefore b}$$

Nghĩa là, $(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \rightarrow b) = 1$

- Nếu $a_i, i=1, 2, \dots, n$ là các mệnh đề đúng thì b là mệnh đề đúng

QUI TẮC SUY DIỄN

- Qui tắc **khẳng định** (Modus Ponens - MP)

$$a \rightarrow b, a$$

$$b$$

- Qui tắc **phủ định** (Modus Tollens - MT)

$$a \rightarrow b, \neg b$$

$$\neg a$$

QUI TẮC SUY DIỄN

- Hội (Conjunction - Conj)

$$\frac{a, b}{a \wedge b}$$

- Đơn giản (Simplification- Simp)

$$\frac{a \wedge b}{a}$$

QUI TẮC SUY DIỄN

- Cộng (Addition -Add)

$$\frac{a}{a \vee b}$$

- Tam đoạn luận rời (Disjunctive syllogism - DS)

$$\frac{a \vee b, \neg a}{b}$$

QUI TẮC SUY DIỄN

- Tam đoạn luận (Hypothetical syllogism - HS)

$$\frac{a \rightarrow b, b \rightarrow \gamma}{a \rightarrow \gamma}$$

- Theo trường hợp (By case - BC)

$$\frac{a \rightarrow \gamma, b \rightarrow \gamma}{(a \vee b) \rightarrow \gamma}$$

CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ (Proposition Proof)

- Chứng minh:
 - Là một dãy hữu hạn các mệnh đề, trong đó mỗi một mệnh đề là một tiên đề hoặc được suy diễn từ các mệnh đề trước đó
- Định lý:
 - Là một mệnh đề có thể chứng minh được

CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ

- Một mệnh đề cần chứng minh có thể được phát biểu lại dưới dạng một mệnh đề dựa trên phép toán kéo theo
- Ví dụ:

Chứng minh: “Nếu A, B và C thì D”

Mệnh đề cần chứng minh là: $A \wedge B \wedge C \rightarrow D$

Chứng minh: 1. A (giả thiết - premise)

 2. B (giả thiết)

 3. C (giả thiết)

 ...

 k. D

CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ

- Ví dụ:

Chứng minh rằng: $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg A \rightarrow B \wedge C$

Chứng minh:	1. $A \vee B$	P
	2. $A \vee C$	P
	3. $\neg A$	P
	4. B	1, 3, DS
	5. C	2, 3, DS
	6. $B \wedge C$	Conj

CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ

- Ví dụ:

"Đội nhà thắng hoặc Tôi buồn. Nếu đội nhà thắng thì Tôi đi xem phim. Nếu Tôi buồn thì con chó của tôi sủa. Chó của tôi yên lặng. Vì vậy, Tôi đi xem phim". Chứng minh kết luận là đúng

W: Đội nhà thắng.

S: Tôi buồn.

M: Tôi đi xem phim.

B: Chó của Tôi sủa.

Cần chứng minh: $(W \vee S) \wedge (W \rightarrow M) \wedge (S \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow M$

CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ

- Chứng minh: $(W \vee S) \wedge (W \rightarrow M) \wedge (S \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow M$

Ta có:	1. $W \vee S$	P
	2. $W \rightarrow M$	P
	3. $S \rightarrow B$	P
	4. $\neg B$	P
	5. $\neg S$	3, 4, MT
	6. W	1, 5, DS
	7. M	2, 6, MP